Schachbrettaufgaben aus dem "Mathematischen Duell"
Bílovec - Chorzów - Graz - Přerov

Robert Geretschläger

Tag der Mathematik, Graz

9. Februar 2017

Das Mathematische Duell, Kategorien

- 4 Schulen, 12 Teilnehmer je Schule plus Gäste

Das Mathematische Duell, Kategorien

- 4 Schulen, 12 Teilnehmer je Schule plus Gäste
- 3 Kategorien nach Alter: A, B, C

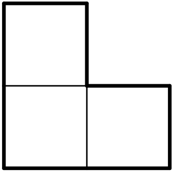
Das Mathematische Duell, Kategorien

- 4 Schulen, 12 Teilnehmer je Schule plus Gäste
- 3 Kategorien nach Alter: A, B, C
- 2 Wettbewerbe: Einzel, Mannschaft

Das Mathematische Duell, Kategorien

- 4 Schulen, 12 Teilnehmer je Schule plus Gäste
- 3 Kategorien nach Alter: A, B, C
- 2 Wettbewerbe: Einzel, Mannschaft
- 1 Sprache: Englisch

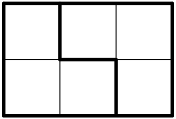
Untersuche ob es möglich ist, Schachbretter mit den Maßen
a) 11×11, bzw.
b) 12×12
vollständig mit Figuren zu überdecken, die wie in der unten abgebildeten Figur aus jeweils drei Quadraten zusammengesetzt sind.



a) Nein, wegen $11 \cdot 11 \not\equiv 0 \pmod 3$.

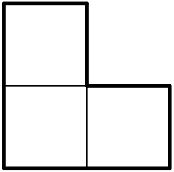
a) Nein, wegen $11 \cdot 11 \not\equiv 0 \pmod 3$.

b) Ja.



Man kann wie abgebildet ein 3×2 Rechteck mit zwei derartigen Figuren überdecken.
Verbindet man 6 derartige Rechtecke der Reihe nach zu einem 12×2 Rechteck, ist dieses von 12 Figuren überdeckt. Ein 12×12 Schachbrett ist aus 6 derartigen Rechtecken zusammengesetzt. $\square$

Es sei k eine nicht-negative ganze Zahl. Für welche positiven ganzen Zahlen $n = 6k + 3$ ist es möglich ein $n \times n$ Schachbrett vollständig mit Figuren zu überdecken, die je wie abgebildet aus drei Quadraten zusammengesetzt sind?

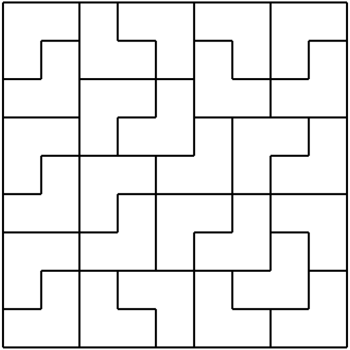


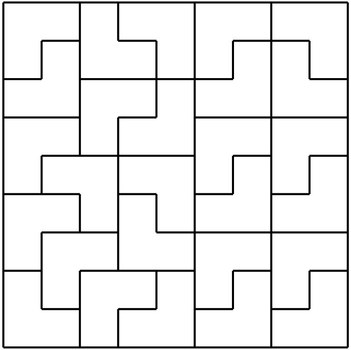
A-T-3-98, Lösung 1/2

Es ist nicht möglich für $k = 0$ (3×3 Quadrat).

Es ist nicht möglich für $k = 0$ (3×3 Quadrat).

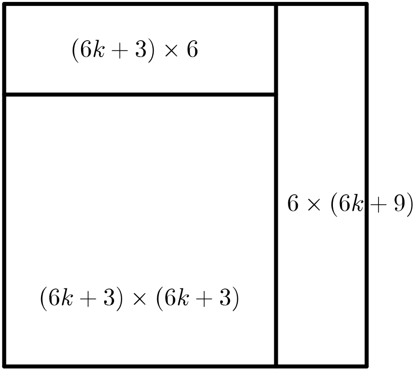
Es ist möglich für $k = 1$ (9×9 Quadrat):

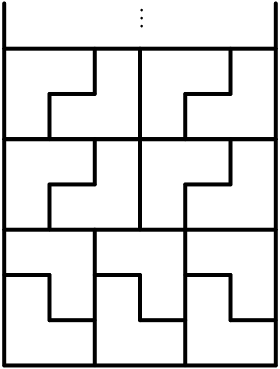




Mit Induktion sehen wir, dass es für alle $k \geq 1$ möglich ist:

Mit Induktion sehen wir, dass es für alle $k \geq 1$ möglich ist:





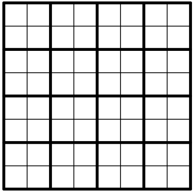
$\square$

A-T-3-09

Einige Felder eines $n \times n$ Schachbretts werden schwarz gefärbt. Bestimme die kleinste Anzahl die man schwarz färben kann, sodass jedes 2×2 Quadrat auf dem Schachbrett mindestens zwei schwarze Felder enthält.

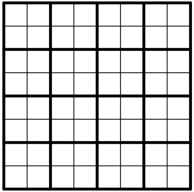
A-T-3-09, Lösung 1/2

n gerade:
$\frac{n^2}{4}$ Quadrate 2×2, daher mindestens $2 \cdot \frac{n^2}{4} = \frac{n^2}{2}$ schwarze Felder.

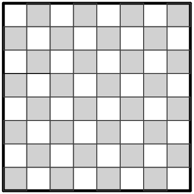


A-T-3-09, Lösung 1/2

n gerade:
$\frac{n^2}{4}$ Quadrate 2×2, daher mindestens $2 \cdot \frac{n^2}{4} = \frac{n^2}{2}$ schwarze Felder.

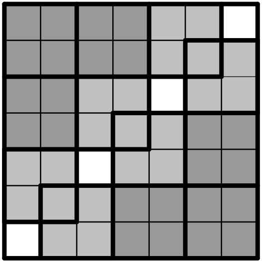


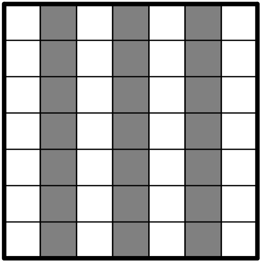
Das gewöhnliche Schachbrett zeigt uns, dass eine derartige Färbung möglich ist.



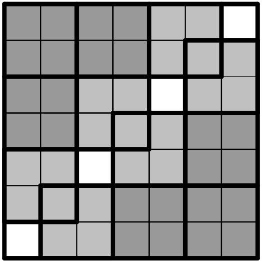
$\square$

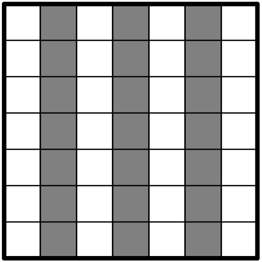
n ungerade:





n ungerade:





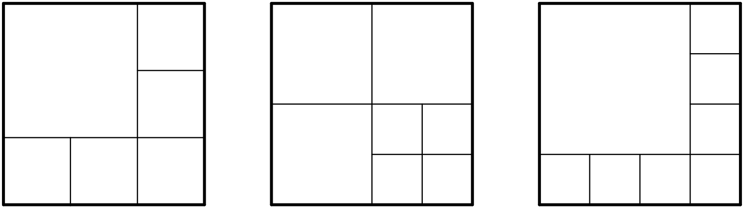
2 Quadrate müssen in jedem dunkel grauen Quadrat gefärbt sein: $\frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-3}{2} \cdot 2$ gefärbte Quadrate. 3 Quadrate in jedem Paar hell grau gefärbter Quadrate müssen gefärbt sein: $\frac{n-1}{2} \cdot 3$ gefärbte Quadrate.

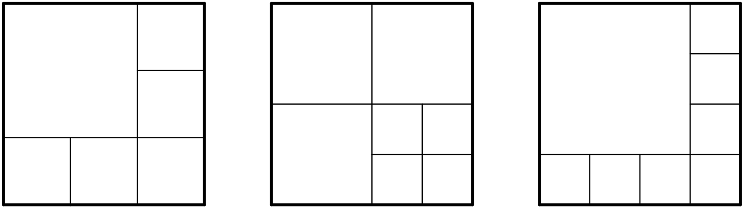
$$\frac{n-1}{2} \cdot 3 + \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-3}{2} \cdot 2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

$\square$

Es sei $n \geq 6$ eine ganze Zahl. Beweise, dass ein gegebenes Quadrat in n (nicht notwendigerweise kongruente) Quadrate zerteilt werden kann.

I-3-93, Lösung



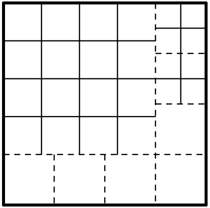


$6 \equiv 0 \pmod 3$, $7 \equiv 1 \pmod 3$ und $8 \equiv 2 \pmod 3$ $\square$

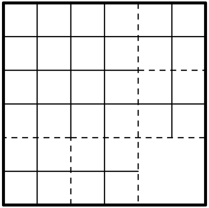
Beschreibe eine Methode mit der man ein gegebenes Quadrat in
a) 29, b) 33, c) 37
nicht notwendigerweise kongruente Quadrate zerteilen kann.

C-T-2-94, Lösung

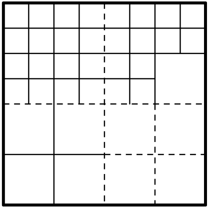
a) 29



b) 33

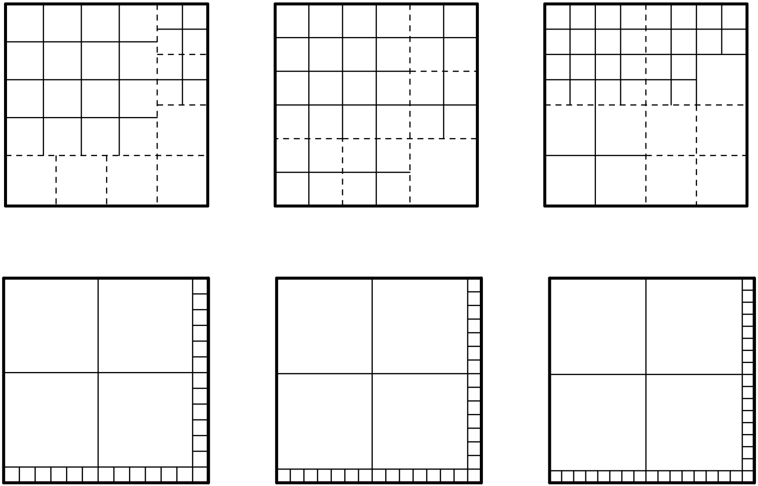


c) 37

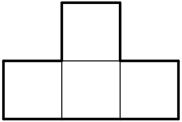


C-T-2-94, Lösung

a) 29 b) 33 c) 37



Wir habn einen Sack voller T-Tetrominos, wie in untenstehender Figur gegeben.



Ist es möglich, ein 8×12 Schachbrett vollständig ohne Überlappungen mit T-Tetrominos zu überdecken (unter der Annahme, dass die Quadrate des Schachbretts gleich groß wie jene des Tetrominos sind)? Ist es möglich für ein 3×8 Schachbrett? Ist es möglich für ein 7×10 Schachbrett? Zeichne in jedem Fall, falls es möglich ist, eine solche Überdeckung. Wenn es nicht möglich ist, begründe warum nicht.

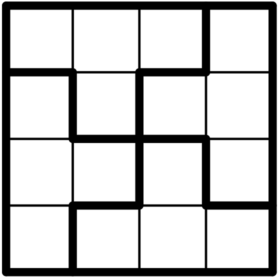
C-T-2-02, Lösung 1/2

Die Überdeckung des 8×12 Schachbretts ist möglich. Man zerschneidet zuerst das Schachbrett in lauter 4×4 Stücke.

C-T-2-02, Lösung 1/2

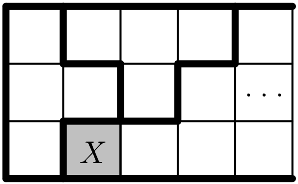
Die Überdeckung des 8×12 Schachbretts ist möglich. Man zerschneidet zuerst das Schachbrett in lauter 4×4 Stücke.

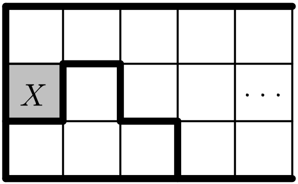
Jedes Stück kann auf diese Art überdeckt werden:



C-T-2-02, Lösung 2/2

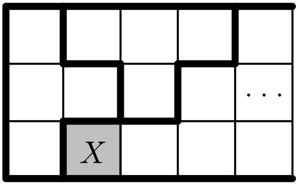
Die Überdeckung des 3×8 Schachbretts ist nicht möglich.

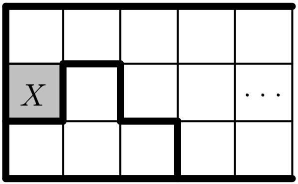




C-T-2-02, Lösung 2/2

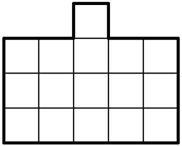
Die Überdeckung des 3×8 Schachbretts ist nicht möglich.

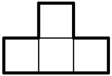




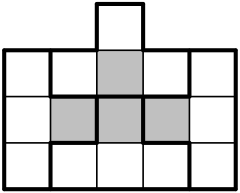
Die Überdeckung des 7×10 Schachbretts ist nicht möglich, wegen $70 \not\equiv 0 \pmod 4$. $\square$

Vor mir liegt ein Brett, das wie abgebildet aus 16 Einheitsquadraten zusammengesetzt ist. Ich möchte nun einige dieser Quadrate grün färben. Wenn ich das abgebidete T-Tetromino auf das Brett so lege, dass jedes Quadrat des Tetrominos genau ein Quadrat des Bretts bedeckt, soll immer mindestens ein Quadrat des Tetrominos auf einem grünen Quadrat liegen. Bestimme die kleinste Anzahl von Quadraten, die ich färben kann um dies zu erreichen und beweise, dass es sich dabei um die kleinste Zahl handelt.

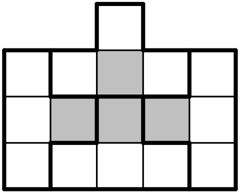




Die kleinste Anzahl ist 4. Färbe ich vier Quadrate wie in der Abbildung, wird jede Lage des Tetrominos mindestens ein grünes Quadrat abdecken.



Die kleinste Anzahl ist 4. Färbe ich vier Quadrate wie in der Abbildung, wird jede Lage des Tetrominos mindestens ein grünes Quadrat abdecken.



Es ist keine kleinere Zahl möglich, da das Brett wie abgebildet in vier Tetrominoförmige Teile zerschitten werden kann, die jeweils kein gemeinsames Quadrat besitzen. □

Gegeben sei ein 4×4 Schachbrett, bestehend aus 16 Einheitsquadraten. Bestimme die Anzahl der Möglichkeiten, wie 5 kongruente gerade Triominos (3×1 Rechtecke) so auf das Brett gelegt werden können, dass genau ein Quadrat unbedeckt bleibt.

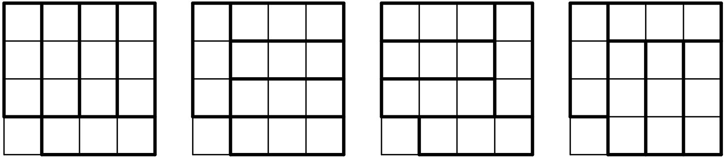
C-T-1-14, Lösung

Wie leicht nachzuweisen ist, gibt es keine Möglichkeit das Brett so zu belegen, dass das unbedeckte Feld ein Innenfeld oder ein inneres Randfeld ist. Das unbedeckte Feld muss also ein Eckfeld sein.

C-T-1-14, Lösung

Wie leicht nachzuweisen ist, gibt es keine Möglichkeit das Brett so zu belegen, dass das unbedeckte Feld ein Innenfeld oder ein inneres Randfeld ist. Das unbedeckte Feld muss also ein Eckfeld sein.

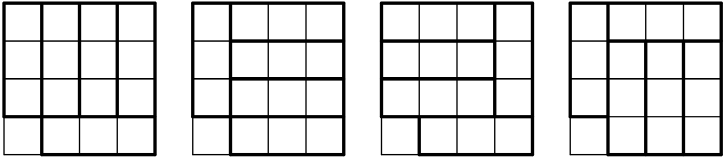
O.B.d.A. nehmen wir an, das unbedeckte Feld sei links unten. In diesem Fall gibt es die angebideten vier Bedeckungsmöglichkeiten:



C-T-1-14, Lösung

Wie leicht nachzuweisen ist, gibt es keine Möglichkeit das Brett so zu belegen, dass das unbedeckte Feld ein Innenfeld oder ein inneres Randfeld ist. Das unbedeckte Feld muss also ein Eckfeld sein.

O.B.d.A. nehmen wir an, das unbedeckte Feld sei links unten. In diesem Fall gibt es die angebideten vier Bedeckungsmöglichkeiten:

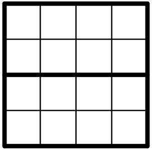


In Summe gibt es $4 \cdot 4 = 16$ Möglichkeiten, das Schachbrett zu belegen. $\square$

C-T-1-07

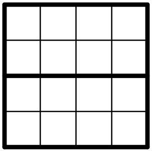
Bestimme die Anzahl der möglichen Überdeckungen eines 4×4 Schachbretts mit acht 2×1 Dominos.

Wenn das Schachbrett durch eine waagrechte Mittellinie wie abgebildet in zwei gleiche Teile unterteilt werden kann, kann jede Hälfte unabhängig durch 4 Dominos überdeckt werden.

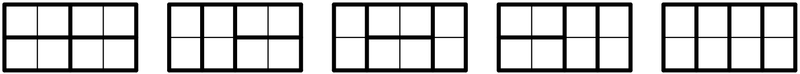


C-T-1-07, Lösung 1/4

Wenn das Schachbrett durch eine waagrechte Mittellinie wie abgebildet in zwei gleiche Teile unterteilt werden kann, kann jede Hälfte unabhängig durch 4 Dominos überdeckt werden.

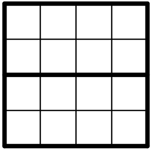


Es gibt genau die 5 abgebildeten Möglichkeiten, ein 2×4 Rechteck mit 4 Dominos zu überdecken.

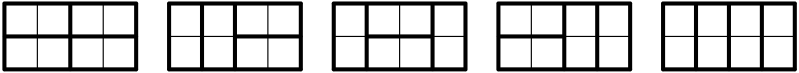


C-T-1-07, Lösung 1/4

Wenn das Schachbrett durch eine waagrechte Mittellinie wie abgebildet in zwei gleiche Teile unterteilt werden kann, kann jede Hälfte unabhängig durch 4 Dominos überdeckt werden.

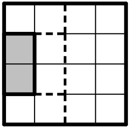


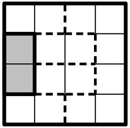
Es gibt genau die 5 abgebildeten Möglichkeiten, ein 2×4 Rechteck mit 4 Dominos zu überdecken.



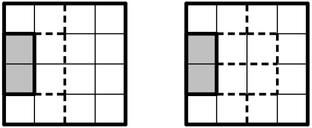
Dieser erste Fall ergibt also $5 \cdot 5 = 25$ Überdeckungen.

Wenn die waagrechte Trennung nicht möglich ist, muss es ein Domino geben, das die zentrale waagrechte Linie überquert, und es gibt ein solches, das am weitesten links liegt. Liegt dieses am linken Rand, erhalten wir zwei Möglichkeiten:



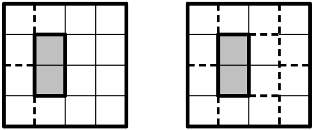


Wenn die waagrechte Trennung nicht möglich ist, muss es ein Domino geben, das die zentrale waagrechte Linie überquert, und es gibt ein solches, das am weitesten links liegt. Liegt dieses am linken Rand, erhalten wir zwei Möglichkeiten:



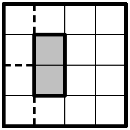
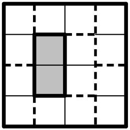
Die linken Eckfelder können nur auf eine Art bedeckt werden. Legt man ein zweites Domino senkrecht neben dem linken, gibt es eine senkrechte Mittentrennlinie, und die rechte Hälfte kann auf 5 Arten überdeckt werden. Legt man zwei Dominos waagrecht auf diese zwei Felder, gibt es nur einen Weg um die Bedeckung fertig zu stellen. Dieser Fall ergibt 6 Überdeckungen.

Der nächste Fall ergibt sich, wenn das am weitestens links liegende senkrechte Mittndomino in der zweiten Spalte von links liegt.

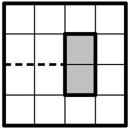
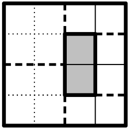


Da es unmittelbar links daneben kein senrechtes Domino gibt, muss es am linken Rand zwei senrechte Dominos geben. Es gibt nur eine Möglichkeit, diese Überdeckung zu vervollständigen.

Der nächste Fall ergibt sich, wenn das am weitestens links liegende senkrechte Mittndomino in der zweiten Spalte von links liegt.

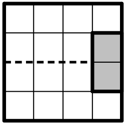



Da es unmittelbar links daneben kein senrechtes Domino gibt, muss es am linken Rand zwei senrechte Dominos geben. Es gibt nur eine Möglichkeit, diese Überdeckung zu vervollständigen. Nun kann das erste senkrechte Mittendomino in der 3. Spalte liegen.

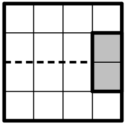
In diesem Fall gibt es $2 \cdot 2 = 4$ Überdeckungen.

Es gibt keine Überdeckung, bei der das erste senkrechte Mittendomino ganz rechts liegt.



Die waagrechte Trennlinie erzeugt zwei Teile, die aus je 7 Quadraten bestehen. Da 7 ungerade ist, können diese Teile nicht durch Dominos bedeckt werden.

Es gibt keine Überdeckung, bei der das erste senkrechte Mittendomino ganz rechts liegt.



Die waagrechte Trennlinie erzeugt zwei Teile, die aus je 7 Quadraten bestehen. Da 7 ungerade ist, können diese Teile nicht durch Dominos bedeckt werden.

In Summe gibt es $25 + 6 + 1 + 4 = 36$ Überdeckungen. $\square$

Danke für die Aufmerksamkeit!

http://www.mathematicalduel.eu

Danke für die Aufmerksamkeit!

http://www.mathematicalduel.eu

robert.geretschlaeger@brgkepler.at

Danke für die Aufmerksamkeit!

http://www.mathematicalduel.eu

robert.geretschlaeger@brgkepler.at

http://geretschlaeger.brgkepler.at