Tensegrity

Einleitung[1]

Tensegrity ist eine Erfindung des amerikanischen Star-Architekten Buckminster Fuller. Dieser soll in einem Vortrag vor Top-Mathematikern folgende Frage gestellt haben*: "Angenommen, drei Menschen halten jeweils eine Stange, so dass die entsprechenden Geraden sich weder schneiden noch parallel sind. Kann man diese Stangen mit Schnüren (nur mit Schnüren!) so verbinden, dass das Gesamtgebilde stabil ist?"*

Abbildung 1: 3 Stäbe, die über Seile verbunden sind.

Das Publikum reagierte mit ungläubigem Gemurmel, leisen Fragen und Kopfschütteln. Nach einigen Augenblicken überraschte Buckminster Fuller die Versammlung aber mit der Aussage: "*Hier habe ich ein Beispiel!*" Gleichzeitig hob er ein Tensegrity Modell empor und nahm den verdienten Beifall entgegen.

Begriffsklärung

Tensegrity, manchmal auch *Tensional Integrity* genannt, ist ein Kunstwort aus dem Englischen und setzt sich aus den Wörtern *Tension* (Spannung) und *Integrity* (Zusammenhalt, Ganzheit, Einheit) zusammen. Richard Buckminster Fuller und Kenneth Snelson haben im 20. Jahrhundert diesen Begriff geprägt und architektonischen Meisterwerke mit diesem Prinzip erbaut.

Allgemeines

Tensegrity ist ein Tragwerkssystem, das in der Regel nur aus Stäben und Seilen besteht und ein stabiles, in sich geschlossenes System bildet. Die starren Stäbe oder starren Elemente sind scheinbar durcheinander im Raum angeordnet und dürfen sich dabei nicht berühren. Sie werden durch Seile miteinander verbunden, mit deren Hilfe das räumliche Gebilde auch erst in Position gehalten wird. Das Faszinierende dabei ist, dass sich dabei diese Strukturen durch Zug und Druck selbst stabilisieren, wobei auf Seile Zugspannungen wirken. Die auf Druck beanspruchten Stäbe hängen oder schweben demnach also in einem Netz aus *kontinuierlichem Zug*.

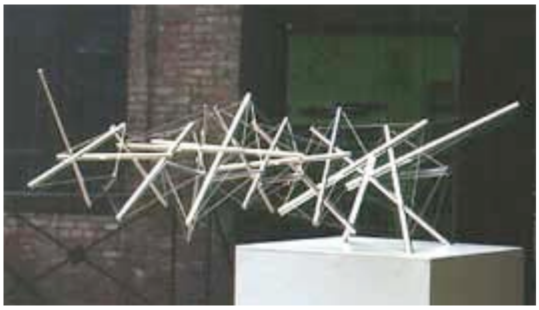


Abbildung 2: Modell Ken Snelson

Alltagsbeispiel: Rad als Tensegrityfigur – das Speichenradprinzip[2]

Die Speichen stehen unter einer starken Zugspannung. Dabei werden bei einer Umdrehung des Rades die Speichen in gewissem Maß unterhalb der Nabe entlastet oder zusätzlich oberhalb der Nabe belastet ohne dass die Speichen ihre Vorspannung auch nur annähernd verlieren. Die Druckkräfte nimmt die Felge auf. Ein Tennisschläger funktioniert übrigens ähnlich.

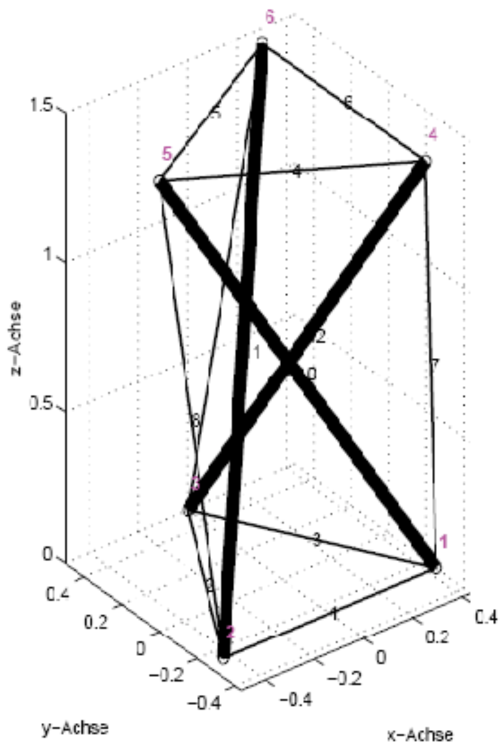
[1] Tensegrity, in: http://www.mathematikum-unterwegs.de/ (Ausstellungskatalog „Mathematik zum Anfassen“)
[2]http://www.science-on-stage.de/media/materialien/spannung/Platz_1_Schroder_Tensegrity2.pdf 19.2.10

Beschreibung der Kräfte eines einfachen Tensegrity Objektes.

Zuerst wählen wir ein relativ einfaches Tensegrity Objekt (Abb.1) aus. Eine genaue Betrachtung des Objektes lässt uns erkennen, dass die Seile immer am Ende der Stangen angreifen. Es gibt also mehrere gemeinsame Angriffspunkte, wo die auftretenden Zugkräfte der Seile wirken können. In der Mathematik sagt man allgemein dazu „Knoten", idealisierter Punkt, die über „Kanten", also die Verbindungsgeraden verbunden sind. Insgesamt sind in Abb. 3 also sechs Knoten, wobei drei an der Deckfläche und drei an der Grundfläche sind und neun Kanten, die die Knoten miteinander verbinden.

Das Newtonsche Trägheitsprinzip, das erste Newton'sches Axiom, besagt nun, dass ein Körper seinen Bewegungszustand beibehält, wenn keine äußeren Kräfte auf ihn wirken. In der klassischen Mechanik wird das allgemein auch Gleichgewichtsbedingung bezeichnet. Damit das Tensegrity stabil ist, muss also die Summe aller Kräfte in den angreifenden Punkten, den Knoten, sich gegenseitig aufheben, also gleich Null sein. Die Seile können nur Zug-, die Stangen nur Druckkräfte aufnehmen.

Generell sind die Kräfte unbekannt, und so kann man sie willkürlich ansetzten, was zur Folge hat, dass man im Ergebnis mitunter eine negative Kraft erhält. Normalerweise werden Kräfte in den Stab aber positiv gezählt - Kräfte, die auf das Seil wirken, negativ. Deswegen müssten eigentlich die Kräfte in den Seilen immer ein anderes Vorzeichen haben als die Kräfte im Stab. Mann muss nun beachten dass, die Kraftpfeile in den Endpunkten der Tensegrity-Stangen nicht mehr in einer Ebene liegen!



Daher geht man

1) in klassischer Ingenieur-Manier vor und legt das Ganze in ein Koordinatensystem, wobei die Kräfte in jede Raumrichtung zerlegt werden und die Gleichgewichtsbedingungen in jeder Koordinate unter Berücksichtigung der Geometrie, genauer der Trigonometrie, aufgestellt wird. D.h.: Summe der Kräfte in x-Richtung gleich Null usw. oder
2) zur leichteren Berechnung in Vektorenschreibweise über. Alle Punkte sind in kartesischen Koordinaten erfasst. Krafteinheitsvektor Fe eines Seiles erhält man über Differenz der beteiligten Knotenpunkte geteilt durch Betrag des Vektors. Summe aller Kraftvektoren gleich 0.
$$\sum \vec{F}_i = 0.$$
Momente können unberücksichtigt werden, wenn alle Seile im selben Punkt angreifen und die Druckstäbe relativ dünn sind oder keine Verschiebung des Gebildes auftritt.

Dabei muss man beachten, dass auch im Stab Kräfte verursacht werden, die in Achsenrichtung, also entlang des Stabes, wirken. Wertet man den Versuch des einfachen Tensegrities quasi grafisch aus, so erkennt man durch Superposition, die geometrische

Addition, der Seilkräfte, dass die resultierende Kraft der Seile genau in den Stab hinein zeigt. Diese wird am anderen Ende des Stabes durch eine gleich große Gegenkraft - ebenfalls durch drei Seile verursacht - kompensiert und ergibt die Summe der Kräfte insgesamt ist 0=> stabil.

Berechnungen für Interessierte und Studenten

Alternativ kann man ein homogenes Gleichungssystem mit Hilfe der Linearen Algebra lösen. Insgesamt ergeben sich bei vier angreifenden Kräften – inklusive Stabkräfte – pro Knoten und insgesamt sechs Knoten:

Pro Knoten ergibt sich eine Gleichung mit vier Unbekannten/Kräften. Insgesamt gibt es bei sechs Knoten also sechs Gleichungen mit vier Unbekannten pro Gleichung. Sechs Gleichungen multipliziert mit vier Unbekannten ergibt 24 Unbekannte. Diese werden halbiert, da dieselbe Kraft in zwei Knoten wirkt. Berücksichtigt man die drei Raumrichtungen =>(Knoten) x 3 = 6 x 3 = 18 Gleichungen bei insgesamt 24/2 = 12 Unbekannten (9 Seil- + 3 Stabkräfte). Es ergibt sich eine Matrix M^{18x12}. Da m>n ist das Gleichungssystem überbestimmt mit m-r Bedingungen an die Koeffizienten.
Matrixausschnitt für 4. Knoten, also Zeile m=12,13,14 von insgesamt 18 Zeilen.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} . & . & . & . & . & . & . & . & . & .. & . & .. \\ 0 & 0 & 0 & F_{ex45}:0-0{,}23 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{ex43} \\ 0 & 0 & 0 & F_{ey45}:-0{,}4-0{,}4 & 0 & F_{ey46}:1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{ey43} \\ 0 & 0 & 0 & F_{ez45}:0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{ez43} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}}_{12\ F_{ab}=n} . = \left.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} 18 \text{ Zeilen}=m$$

mit $F_{exyz\ ab}$ = Einheitsrichtungvektor F zwischen Knoten a und Knoten b ($\vec{F}ab = \frac{b-a}{/b-a/}$).

Streng genommen müsste man auch das Eigengewicht des Körpers mitberücksichtigen, welches aber meistens sehr klein ist. Ein Gedankenexperiment zeigt einen Extremfall: Tensegrity im Weltraum, oder Tensegrity auf der Erde, das auf einem Knoten steht.

Genauere mathematische Ausführungen mittels Linearer Algebra werden normalerweise mit Konnektivitätsmatrizen, Steifigkeitsmatrizen usw. gebildet, die als Ergebnis einen Kraftvektor liefern.

Statische Betrachtung

Möglich ist auch die Betrachtung mit Hilfe der Statik, indem man versucht das Tensegrity als einfaches Fachwerk zu sehen. Dazu überprüft man die statische Bestimmtheit des Objektes über die Beziehung:

$n = r + s - 3k$ (für 2-D Objekte: $n = r + s - 2k$).

r : Anzahl der Reaktionen im Lager. Bei Tensegrities ist r=0, da keine Lager vorhanden sind.
s : Anzahl der Stäbe bzw. Seile.
k : Anzahl der Knoten

Dann gilt für das statische System:

- für n < 0 : statisch unterbestimmt, also verschiebbar,
- für n = 0 : statisch bestimmt, also in Ruhe

- für $n > 0$: statisch überbestimmt, in Ruhe (sicherer als statisch bestimmt - mehrere zwei- bzw. dreiwertige Lager).

Bestimmung der statischen Bestimmtheit:
Aus Abb. 3 ergibt sich $r=0$, $s=12$, $k=6$.
$n = 12 + 0 - 2.6 = -6$ => statisch unterbestimmt.

Die soeben errechnete statische Unterbestimmtheit hat zur Folge, dass Tensegrities generell äußerst instabil gegenüber äußerer Belastung sind und sehr leicht verformt werden können. Deshalb gilt in Ausstellungen generelles Berührverbot für die Kunstwerke.
Hierbei muss jedoch bemerkt werden, dass die Stabilität eines Tensegrity stark davon abhängt, wie stark die Vorspannung der Seile ist, quasi unter wie viel Zug es aufgestellt wurde. Abhängig davon kann es durchaus beachtlichen äußeren Kräften standhalten. Das Konstrukt verschiebt sich in eine neue Gleichgewichtslage. Ist es aber straff genug gespannt, so kann jener kritische Punkt hinausgezögert werden in dem irgendein Seil keine Zugspannung mehr - ein Seilelement also keine Kraft mehr - aufnimmt und damit das ganze instabil wird.
Aus den Grundlagen der Statik wissen wir, dass wir nur statisch bestimmte Systeme relativ einfach berechnen können. Die Stab- und Seilkräfte können also direkt aus den Gleichgewichtsbedingen ausgerechnet werden.

Abbildung 4:Der Skylon Tower, London 1951

Beispiele hierfür sind im Gebäudebau, im Brückenbau, in Kran- und Mastenbau und im Maschinenbau zu finden.
Sobald wir statisch unbestimmte Systeme vorliegen haben, kann sich das Gebilde aber erheblich verformen. Daher muss der Ingenieur das Stoffgesetz, ein physikalisches Gesetz, das eine Kraftgröße oder Spannung mit einer Verschiebungsgröße, der Verformung verknüpft und die Ausdehnung bei Temperaturänderung mitberücksichtigen. Damit ist es mitunter möglich die Verschiebung der Knotenpunkte und die neue Gleichgewichtslage zu berechnen. Dabei kommt es nicht unwesentlich auf die Beschaffenheit des Materials der Seile an ob man mathematisch eine Lösung modellieren kann. Verhalten sich die Seile wie Federn, so ist dies mit dem Hook'schen Gesetz zu errechnen und relativ einfach, da die Kraft linear mit dem Abstand eingeht.

Mathematischer Ausblick auf Tensegrity Berechnungen

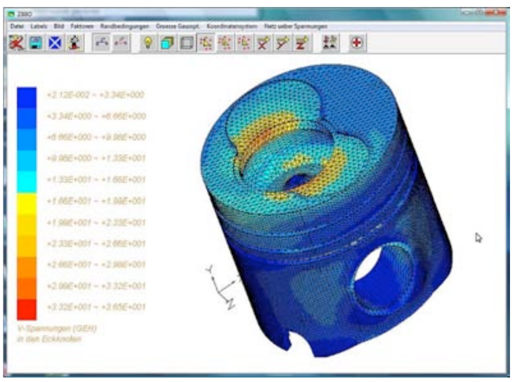


Abbildung 5 Druckbeanspruchung Kolben

Häufig besitzen Tensegrity-Strukturen nur wenige Redundanzen, d.h. der Ausfall eines Tragglieds ist mit dem Versagen der Gesamtstruktur verbunden. Weiterhin ist die aufgebrachte Vorspannung der Zugstäbe eine wesentliche Einflussgröße für das Tragverhalten. Aufgrund des hohen Grades der statischen Unbestimmtheit ist die Strukturanalyse von Tensegrity-Strukturen nur mit räumlichen Modellen mittels der Finiten Elemente Methode auf anschauliche, didaktisch wertvolle Weise möglich.

Finite-Elemente-Methode[1]

Die **Finite-Elemente-Methode**, kurz **FEM** genannt, oder auch *Methode der finiten Elemente*, ist ein numerisches Verfahren zur näherungsweisen Lösung, insbesondere elliptischer partieller Differentialgleichungen mit Randbedingungen. Sie ist auch ein weit verbreitetes modernes Berechnungsverfahren im Ingenieurwesen, z.B.: im Automobilbau.

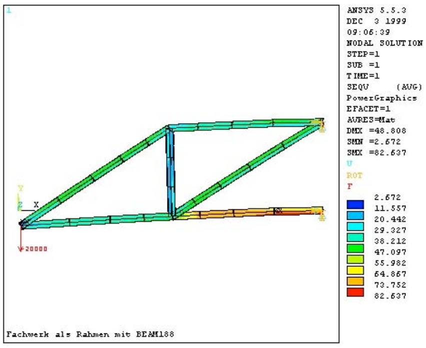


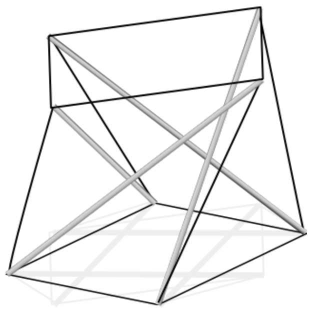
Abbildung 6: Belastung eines Fachwerks

Bei einem statischen Problem werden nun die Knotenpunktverschiebungen aus der Bedingung ermittelt, dass im gesuchten Gleichgewichtszustand die potenzielle Energie ein Minimum hat. Die potenzielle Energie einer Konstruktion ist die Summe aus der inneren Verzerrungsenergie, der elastischen Formänderungsenergie, und dem Potenzial der aufgebrachten Lasten, der von äußeren Kräften geleisteten Arbeit.

Geometrischer Aspekt des Tensegrity

Tensegrity-Grundelemente[2]

Twistelemente sind Tensegrity-Grundelemente, die durch Verdrehung eines prismatischen oder pyramidenförmigen Körpers entstehen. Die erzeugenden, einander gegenüberliegenden gleichmäßigen Polygone des Prismas, also Deck bzw. Grundfläche, also Dreieck, Viereck usw.,werden in einem bestimmten Winkel zueinander verdreht. Der Winkel der Verdrehung kann dadurch ermittelt werden, dass die Länge der Seile, die Zugstäbe, die die Kanten der beiden erzeugenden Polygone miteinander verbinden, minimal ist. In dieser geometrischen Konstellation kann das System vorgespannt werden. Der Verdrehwinkel ist abhängig vom erzeugenden Polygon.



Als Beispiel dient wieder die uns bekannte Figur von Abb. 3 oder Abb.7.

<u>Fragen die einen Mathematiker den lieben langen Tag beschäfttigen:</u>

Wie kann ich brauchbare stabile Tensegrity Figuren finden? Formfindungsproblem?
Wie viele Tensegrity Figuren gibt es überhaupt?
Kann ein und das selbe Modell, das immer die selben Knoten über die selben Seile miteinander verbindet, mehrere stabile Lösungen produzieren?
Kann man ein Bildungsgesetz analog einem einfachen Fachwerk finden?
Wie verhalten sich einzelne Teile des Systems unter Belastung?
Wie muss das Verhältnis zwischen Seil und Stab sein?
Inwieweit vereinfachen sich Gleichungen, wenn ich mein Tensegrity als symmetrisch annehme?

---

[1] http://de.wikipedia.org/wiki/Finite-Elemente-Methode
[2] http://www.uni-stuttgart.de/ilek/Lehre/selfstudyonline/self2.html haj

Mathematische Gebiete, die dazu nötig sind:

Lineare Algebra, Graphentheorie, Abstandsgeometrie, kombinatorische Geometrie, Gruppentheorie, Numerische Mathematik, Einige numerische und einige wenige analytische Formfindungsmethoden, Einsatz von 3D Modellsoftware uvm.

Bedeutung in der Architektur

Die ungewöhnliche Bauweise der Tensegritystrukturen widerspricht der Architektur der letzten Jahrhunderte, deren Leitmotiv war, die Dinge möglichst mit Stahl, Beton und Lagern zu verankern und Kräfte auf wenige Punkte/Lager zu konzentrieren. Im Gegensatz dazu wartet das Tensegrity mit einer kontinuierlichen Verteilung der Kräfte über die gesamte Struktur auf. Auch wenn sich die Anwendungen des Systems zum Großteil auf den künstlerischen Bereich beschränken nur, so hat die Idee des Tensegrity seit ca. 1990 die Architektengemeinschaft weltweit angeregt über Konventionen nachzudenken und neue Wege in Form und Geometrie zu erforschen. Ingenieure verbinden mit Tensegrity eine gewisse Hass-Liebe. Der erstaunliche Vorteil liegt -neben einem ästhetischen Aspekt - darin, dass die Tragkraft mit steigender Größe schneller anwächst als das Eigengewicht. Theoretisch sind damit beliebig große Gebäude möglich. Der Nachteil liegt in der enormen Flexibilität, die sie für eine traditionelle Anwendung schwer einsetzbar machen. Zurzeit wird jedoch daran gearbeitet Tensegrity mit anderen Tragwerksystemen zu verbinden, woraus sich weitaus mehr Möglichkeiten in der Entwurfsplanung ergeben würden. Erste praktische Anwendungen einer Symbiose mit textilen Membranen finden sich bei Überdachungen mit riesigen Spannweiten, die sogenannten *Cable Domes*). Weiters gibt es moderne Stadien Überdachungen die nach dem *Speichenradprinzip* funktionieren.

Beispiele berühmter Tensegrities

Die “**Kurilpa Bridge”** (ursprünglich “Tank Street Bridge”) ist eine $63 Millionen Doller (AUD) teure Fußgeher- und Radfahrbrücke über den Brisbane River in Brisbane, Queenland, Australia. Sie ist mit einer Länge von 470 m die weltweit größte Tensegritybrücke und wurde

am 4. Oktober 2009 eröffnet. Schätzungen zufolge wurde insgesamt 550 Tonnen struktureller Stahl und 6,8 km Spiralkabel eingearbeitet.

Ken Snelson baute mehrere Türme in Amerika, Japan und Holland.

HOLLAND

Abbildung 10: USA

Abbildung 11:
Florida Suncoast Dome St.Petersburg
USA 1988 Geiger Associates
Spannweite ca.220m

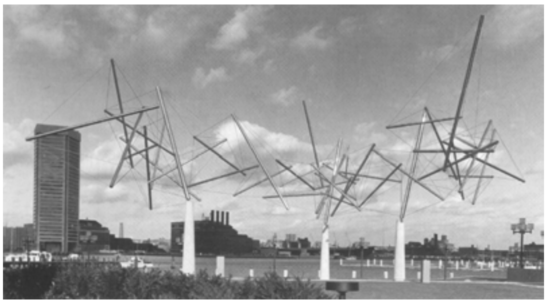


Abbildung 12:Easy Landing 1977

Ein faszinierendes Tensegrity habe ich mit eigenen Augen im Zuge von Linz09 – der Kulturhauptstadt Europas im Jahr 2009 gesehen. Im Ars Elektronica Museum war ein Modell ausgestellt, dass aus Seilen bestand, deren Länge sensibel auf Temperaturveränderungen reagierten. Das bloße Hinhalten der Handfläche im Abstand von mehreren Zentimetern reichte aus, um die Figur des Tensegrity zu verändern. Langsam richtete sich das Gebilde auf und sank ohne Wärme der Handflächen komplett in sich zusammen.

Weitere Anwendungen des Tensegrity

Man muss nicht lange nach Beispielen für die in Mode gekommene Wissenschaft Tensegrity zu suchen. Man hat herausgefunden, dass die Wirbelsäule des Menschen als System mit Bändern, Muskeln und starren Knochen als eine äußerst flexible Struktur fungiert, die die Kraft optimal verteilen kann und somit eigentlich die Bandscheiben enorm entlastet. Mediziner modellieren mit Tensegritgebilden, die gut geeignet sind aufgrund der vielen Freiheitsgrade, weiters das Zusammenspiel von Schultergürtel, Wirbelsäule, Becken und

Beinen, was zu einem ungeahnten Verständnis der Biomechanik führt. Das allumfassende Prinzip der Natur ist es, Material und Energieeinsatz zu minimieren. Hierbei bietet sich das Tensegritymodell besonders gut an und so findet man Zellen in geodätischer Form die sich durch Spannung selbst stabilisieren. Untersuchungen zeigen, dass Kraftwirkung auf Zellen möglicherweise die Biochemie stärker reguliert als angenommen.

Hilfreiche Links und Quellen:

1) http://www.upress.uni-kassel.de/online/frei/978-3-89958-305-2.volltext.frei.pdf , Doktorarbeit von Tobias Driesberg
2) http://www.unibw.de/rz/dokumente/public/getFILE?fid=1824606/Supruangthong_Yuthayanon.pdf; Einfach statisch unbestimmtes ebenes Fachwerk.
3) http://elib.uni-stuttgart.de/opus/frontdoor.php?source_opus=3240&la=en Mathe. Paper der Uni-Stuttgart, sehr ausführlich und abstrakt.
4) http://www.reflexmagazine.ch/pdf/Reflex_n5_EN.pdf, Tensegrity in der Architektur
5) http://www.kennethsnelson.net/
6) Guido F. Meert, Das Becken aus osteopathischer Sicht: Funktionelle Zusammenhänge nach dem Tensegritymodell, Elsevier,Urban&FischerVerlag, 2009 verfügbar unter GoogleBooks.